Granična vrijednost funkcije

Razmatramo funkciju $f: X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

<u>Definicija (Košijeva)</u> Broj A nazivamo graničnom vrijednošću funkcije $f(x)$ u tački x_0, ako je funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke x_0 sa isključenjem same tačke x_0 i ako važi da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)\left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$$

Tada pišemo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ili $f(x) \to A$ kad $x \to x_0$.

<u>Definicija (Hajneova)</u> Broj A je granična vrijednost funkcije $f(x)$ u tački x_0, ako je ona definisana u nekoj okolini tačke x_0 sa isključenjem može biti same tačke x_0 i ako za svaki niz $\{x_n\}$, $\{x_n \neq x_0\}$, koji konvergira ka tački x_0, kad $n \to \infty$, niz vrijednosti $f(x_n)$ konvergira broju A, kad $n \to \infty$, tj $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

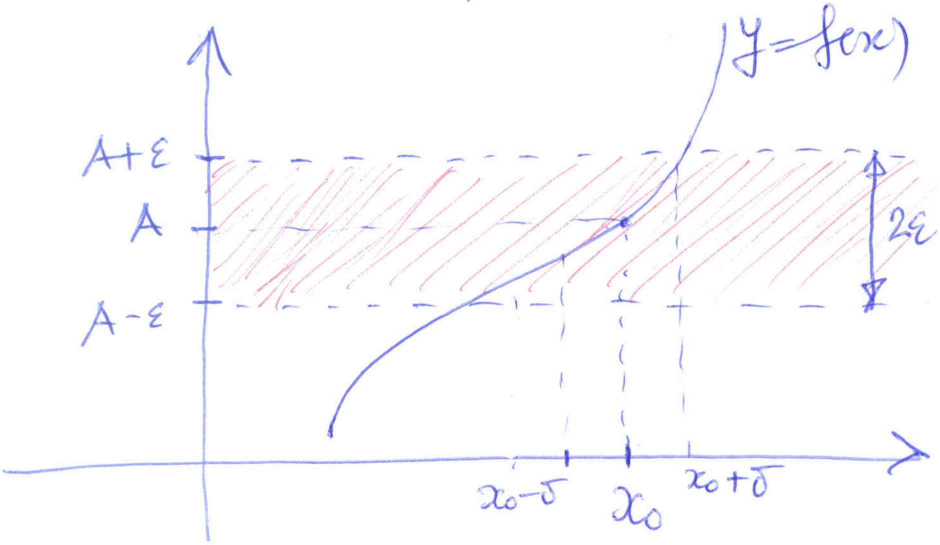
Odnosno,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A) \Leftrightarrow (\forall \{x_n\})\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0\right) \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

Košijeva i Hajneova definicija su ekvivalentne.

Geometrijski smisao granične vrijednosti funkcije $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ je da za proizvoljnu ε-okolinu tačke A, možemo da nađemo δ-okolinu tačke x_0, takvu da se svako x, $x \neq x_0$ iz te δ-okoline slika pomoću funkcije $f(x)$ u ε-okolinu tačke A.

Drugim riječima, tačke grafika funkcije $y = f(x)$ leže unutar trake širine 2ε, ograničene pravima $y = A + \varepsilon$ i $y = A - \varepsilon$. Očigledno, da veličina δ zavisi od izbora ε, pa zbog toga pišemo $\delta = \delta(\varepsilon)$.



Primjer: 1) Dokazati da je $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$.

Rješenje: Prvo, primijetimo da funkcija $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ nije definisana u tački $x_0 = 3$. Uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Nađimo $\delta = \delta(\varepsilon)$, takvo da za svako x za koje je $|x-3| < \delta$ važi da je $|f(x) - 6| < \varepsilon$.

Pošto je $|f(x) - 6| = \left|\dfrac{x^2-9}{x-3} - 6\right| = |x+3-6| = |x-3| < \varepsilon$ za $|x-3| < \delta = \varepsilon$. Znači, za δ uzmemo $\delta = \varepsilon$ i onda je

$$(\forall x)\ |x-3| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 6| = |x-3| < \varepsilon = \delta.$$

Znači, zaista je $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$. $\blacktriangle$

2) Dokazati da je $\lim\limits_{x \to 3} (2x-1) = 5$.

Rješenje Uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Treba da nađemo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takvo da za svako x za koje je $|x-3| < \delta$ važi da je $|(2x-1)-5| < \varepsilon$.

Pošto je $|(2x-1)-5| = |2x-6| = 2|x-3| < \varepsilon$

za $\delta = \delta(\varepsilon)$ ćemo uzeti veličinu $\delta = \varepsilon/2$. Tada za svako x za koje je $|x-3| < \delta (= \varepsilon/2)$ važi da je $|(2x-1)-5| = 2|x-3| < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Slijedi da je $\lim\limits_{x \to 3} (2x-1) = 5$

Granična vrijednost u beskonačnosti ($x \to \infty$)

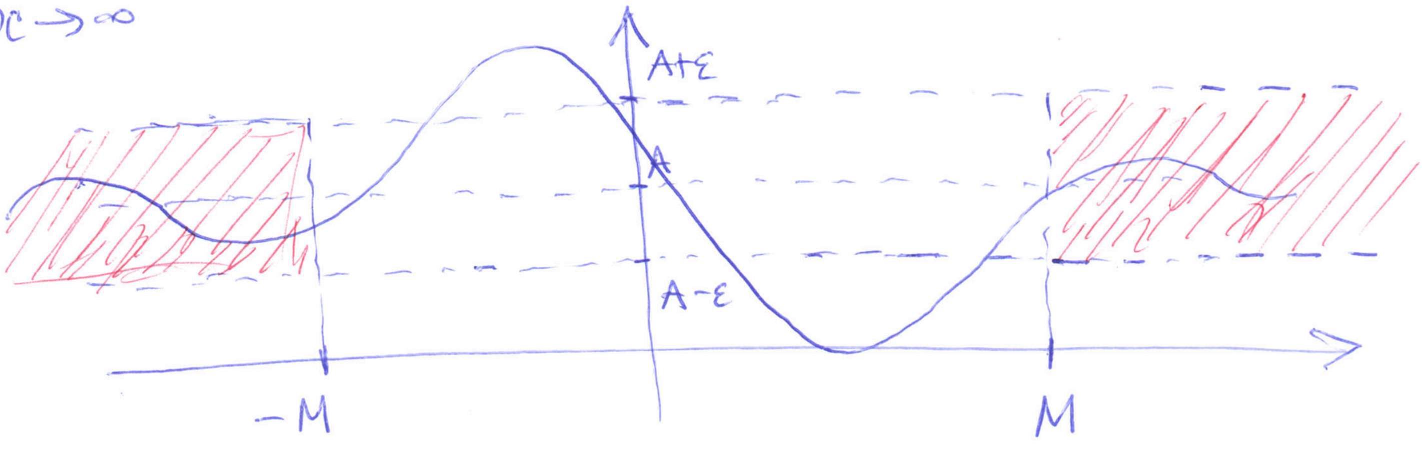
Definicija Graničnom vrijednošću funkcije $f(x)$ kad $x \to \pm\infty$, nazivamo broj A ako:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\forall x)\ x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\forall x)\ x < -M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Odnosno,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\forall x)\ |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$



Svojstva funkcija koje imaju graničnu vrijednost

1. Ako funkcija $f(x)$ ima graničnu vrijednost u tački x_0, onda je ta granična vrijednost jedinstvena

2. Funkcija koja ima graničnu vrijednost u tački x_0 je ograničena u nekoj okolini tačke x_0, sa isključenjem te tačke, tj ograničena je na skupu $O_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$.

3. Ako je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$, onda postoji δ-okolina tačke x_0 u kojoj su vrijednosti funkcije istog znaka kao i broj A

4. Ako je $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$ i ako je u nekoj okolini tačke x_0, $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, onda je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

5. Neka je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Tada je

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \cdot A, \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$

d) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0, g(x) \neq 0)$

Sve ovo se jednostavno dokazuje pomoću Hajneove definicije i svojstava konvergentnih nizova.

Jednostrane granične vrijednosti

Kod definicije granične vrijednosti funkcije $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ podrazumijeva se da x teži ka x_0 proizvoljno: po tačkama koje su manje od x_0 (s lijeve strane od x_0), po tačkama koje su veće od x_0 (s desne strane od x_0) ili kolebajući se oko x_0.

Postoje slučajevi kada način približavanja argumenta x ka x_0 suštinski utiče na vrijednost granične vrijednosti u tački x_0.

Zbog toga, uvodimo pojmove jednostranih graničnih vrijednosti.

<u>Definicija</u> Broj A je granična vrijednost fje $f(x)$ u tački x_0 s lijeve (s desne) strane ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)\left(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$$

$$\left((\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)\left(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)\right)$$

Pišemo $\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = A$ ili kraće $f(x_0 - 0) = A$ za graničnu vrijednost s lijeve strane, a $\lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = A$ ili kraće $f(x_0+0) = A$

Zapis, $0 < x_0 - x < \delta$ znači da $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, a $0 < x - x_0 < \delta$ znači da $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

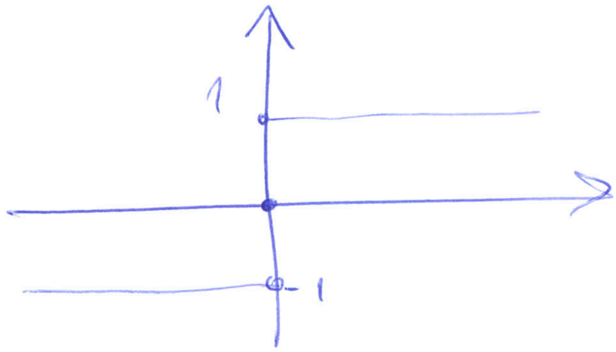
Jasno je da ukoliko postoji $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, onda postoje i obe jednostrane granične vrijednosti u x_0 i jednake su broju A.

Važi i obrnuto tvrdenje, ako postoje obe granične vrijednosti $f(x_0-0)$ i $f(x_0+0)$ i jednaki su, onda postoji i granična vrijednost $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ i jednaka je istoj toj vrijednosti.

Ukoliko je $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ onda $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ne postoji.

<u>Primjer</u> 1) Fja znaka se naziva signum i označava se sa $\operatorname{sgn}(x)$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$$

2) Za funkciju $f(x) = \dfrac{|x|}{x+x^3}$ nadi jednostrane granične vrijednosti u tački $x_0=0$.

<u>Rješenje</u> $f(x) = \dfrac{|x|}{x+x^3} = \dfrac{|x|}{x} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{+x}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = -1$$

Beskonačno male funkcije i njihova svojstva

Definicija Fja $f(x)$ se naziva beskonačno malom funkcijom (bmf) kad $x \to x_0$, ako je

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, tj ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)\left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon\right)$$

Primjer $f(x) = \sin x$ je bmf kad $x \to 0$

$f(x) = x^k$ je bmf kad $x \to 0$

$f(x) = x^2 - 4$ je bmf kad $x \to \pm 2$.

Analogno, fja $f(x)$ je bmf kad $x \to +\infty$ $(-\infty)$ ako je $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Svojstva bmf

1) Suma konačnog broja bmf, kad $x \to x_0$ je bmf kad $x \to x_0$

2) Proizvod bmf, kad $x \to x_0$ i ograničene funkcije je bmf, kad $x \to x_0$

Teorema $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ako i samo ako je $f(x) = A + \alpha(x)$, gdje je $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ (bmf, $x \to x_0$)

<u>Definicija</u> Neka su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ bmf kad $x \to x_0$ i neka je $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$. Ako je:

1) $A \neq 0$ kažemo da su α i β bmf istog reda kad $x \to x$

2) $A = 1$ kažemo da su α i β ekvivalentne bmf kad $x \to x_0$ i pišemo $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$.

3) $A = 0$ kažemo da je $\beta(x)$ bmf višeg reda u odnosu na $\alpha(x)$, kad $x \to x_0$ i pišemo $\beta(x) = o(\alpha(x))$ tj $\beta(x) = \lambda(x) \cdot \alpha(x)$, gdje je $\alpha(x) \to 0$, kad $x \to x_0$.